

Feuille de calcul n°22 — Dénombrement et probabilités – Corrigés

Exercice 1. Écrire sous forme d'entiers ou de fractions irréductibles les nombres suivants.

$$A = \frac{5!}{3!} \quad B = \frac{101!}{99!} \quad C = \frac{7!}{3!^2} \quad D = \frac{3! \times 6!}{4! \times 5!} \quad E = 5! - 4! \quad F = \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}.$$

Solution.

$$A = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!} = 5 \times 4 \text{ donc } \boxed{A = 20}.$$

$$B = \frac{101 \times 100 \times 99!}{99!} = 101 \times 100 \text{ donc } \boxed{B = 10100}.$$

$$C = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!^2} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{6} = 7 \times 5 \times 4 = 7 \times 20 \text{ donc } \boxed{C = 140}.$$

$$D = \frac{3! \times 6 \times 5!}{4 \times 3! \times 5!} = \frac{6}{4} \text{ donc } \boxed{D = \frac{3}{2}}.$$

$$E = 5 \times 4! - 4! = (5 - 1) \times 4! = 4 \times 24 \text{ soit } \boxed{E = 96}.$$

$$F = \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} = \frac{5 \times 1}{5 \times 4!} - \frac{1}{5!} = \frac{5 - 1}{5!} = \frac{4}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{1}{5 \times 3 \times 2} \text{ soit } \boxed{F = \frac{1}{30}}.$$

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier les expressions suivantes.

$$A = \frac{(n+2)!}{(n-1)!} \quad B = \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \quad C = \frac{(n^2-1)n!}{(n+2)!} \quad D = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n \times n!}.$$

Solution.

$$A = \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!} \text{ donc } \boxed{A = n(n+1)(n+2)}.$$

$$B = \frac{(2n+2)(2n+1)((2n)!)}{(2n)!} \text{ donc } \boxed{B = (2n+1)(2n+2)}.$$

$$C = \frac{(n-1)(n+1)n!}{(n+2)(n+1)!} = \frac{(n-1)(n+1)!}{(n+2)(n+1)!} \text{ donc } \boxed{C = \frac{n-1}{n+2}}.$$

$$D = \frac{n(n+1)}{n(n+1)(n+1)!} + \frac{n}{n(n+1)(n+1)!} - \frac{(n+1)^2}{n(n+1)n!(n+1)} = \frac{n^2 + 2n - (n^2 + 2n + 1)}{n(n+1)(n+1)!}$$

donc $\boxed{D = -\frac{1}{n(n+1)(n+1)!}}.$

Exercice 3. Calculer les coefficients binomiaux suivants.

$$A = \binom{4}{2} \quad B = \binom{9}{8} \quad C = \binom{7}{3} \quad D = \binom{125}{0} \quad E = \binom{44}{43} \quad F = \binom{9}{3}.$$

Solution.

$$A = \frac{4 \times 3}{2} \text{ donc } \boxed{A = 6}.$$

$$B = \binom{9}{1} \text{ donc } \boxed{B = 9}.$$

$$C = \frac{7 \times 6 \times 5}{3!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{6} \text{ donc } \boxed{C = 35}.$$

$$\boxed{D = 1}$$

$$E = \binom{44}{1} \text{ donc } \boxed{E = 44}.$$

$$F = \frac{9 \times 8 \times 7}{3!} = \frac{3 \times 3 \times 2 \times 4 \times 7}{3 \times 2} \text{ donc } \boxed{F = 84}.$$

Exercice 4. Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Simplifier les expressions suivantes.

$$A = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} \quad B = \binom{n}{2} + \binom{n}{3} \quad C = \binom{n+1}{n} - \binom{n}{n-1} \quad D = \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}}.$$

Solution.

$$A = n + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} = \frac{6n + n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n[6 + (n-1)(n-2)]}{6} \text{ soit } \boxed{A = \frac{n(n^2 - 3n + 8)}{6}}.$$

$$B = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} = \frac{3n(n-1) + n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n(n-1)(3+n-2)}{6} = \frac{n(n-1)(n+1)}{6} \text{ soit } \boxed{B = \frac{n(n^2 - 1)}{6}}.$$

$$C = \frac{n+1}{1} - \frac{n}{1} = n+1 - n \text{ donc } \boxed{C = 1}.$$

$$D = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(2n+2-(n+1))!} \times \frac{n!(2n-n)!}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)!^2} \times \frac{n!^2}{(2n)!}$$

$$= \frac{2(n+1)(2n+1)}{[(n+1)n!]^2} \times n!^2 = \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)^2 n!^2} \times n!^2 = \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)^2} \text{ donc } \boxed{D = \frac{2(2n+1)}{n+1}}.$$

Exercice 5. On donne le tableau de probabilités suivant :

	B	\bar{B}
A	0,45	0,15
\bar{A}	0,07	0,33

Déterminer les probabilités suivantes.

$$\mathbf{P}(\bar{A}) \quad \mathbf{P}(B) \quad \mathbf{P}(A \cap B) \quad \mathbf{P}(A \cup B) \quad \mathbf{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) \quad \mathbf{P}(\bar{A} \cup B).$$

Solution.

Comme B et \bar{B} forment un système complet d'évènements, d'après la formule de probabilités totales, $\mathbf{P}(\bar{A}) = \mathbf{P}(\bar{A} \cap B) + \mathbf{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,07 + 0,33$ donc $\boxed{\mathbf{P}(\bar{A}) = 0,4}$.

Comme A et \bar{A} forment un système complet d'évènements, d'après la formule de probabilités totales, $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B \cap A) + \mathbf{P}(B \cap \bar{A}) = 0,45 + 0,07$ donc $\boxed{\mathbf{P}(B) = 0,52}$.

Par lecture du tableau, $\boxed{\mathbf{P}(A \cap B) = 0,45}$.

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(A \cap B) = 1 - 0,4 + 0,52 - 0,45 \text{ donc } \boxed{\mathbf{P}(A \cup B) = 0,67}.$$

Par lecture du tableau, $\boxed{\mathbf{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,33}$.

$$\mathbf{P}(\bar{A} \cup B) = \mathbf{P}(\bar{A}) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(\bar{A} \cap B) = 0,4 + 0,52 - 0,07 \text{ donc } \boxed{\mathbf{P}(\bar{A} \cup B) = 0,85}.$$

Exercice 6. On considère deux événements A et B d'une même expérience aléatoire.

1. On suppose que $\mathbf{P}(A) = 0,45$ et $\mathbf{P}(B | A) = 0,6$. Calculer $\mathbf{P}(\bar{A})$ et $\mathbf{P}(A \cap B)$.
2. On suppose que $\mathbf{P}(A) = 0,05$, $\mathbf{P}(B) = 0,1$ et $\mathbf{P}(B | A) = 0,8$. Calculer $\mathbf{P}(A | B)$, $\mathbf{P}(A \cap B)$ et $\mathbf{P}(A \cup B)$.
3. On suppose que $\mathbf{P}(A) = \frac{3}{4}$, $\mathbf{P}(\bar{B} | A) = \frac{1}{2}$ et $\mathbf{P}(\bar{B} | \bar{A}) = \frac{3}{4}$. Calculer $\mathbf{P}(\bar{A})$, $\mathbf{P}(B | A)$, $\mathbf{P}(B)$ et $\mathbf{P}(A | B)$.

Solution.

1. $\mathbf{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbf{P}(A) = 1 - 0,45$ donc $\mathbf{P}(\bar{A}) = 0,55$.

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B | A) = 0,45 \times 0,6 \text{ donc } \mathbf{P}(A \cap B) = 0,27.$$

2. Par la formule de Bayes, $\mathbf{P}(A | B) = \frac{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B | A)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{0,05 \times 0,8}{0,1} = \frac{0,04}{0,1}$ soit

$$\mathbf{P}(A | B) = 0,4.$$

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B | A) = 0,05 \times 0,8 \text{ donc } \mathbf{P}(A \cap B) = 0,04.$$

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B) = 0,05 + 0,1 - 0,04 \text{ donc } \mathbf{P}(A \cup B) = 0,11.$$

3. $\mathbf{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbf{P}(A) = 1 - \frac{3}{4}$ donc $\mathbf{P}(\bar{A}) = \frac{1}{4}$.

$$\mathbf{P}(B | A) = 1 - \mathbf{P}(\bar{B} | A) = 1 - \frac{1}{2} \text{ donc } \mathbf{P}(B | A) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{De même, } \mathbf{P}(B | \bar{A}) = 1 - \mathbf{P}(\bar{B} | \bar{A}) = 1 - \frac{3}{4} \text{ donc } \mathbf{P}(B | \bar{A}) = \frac{1}{4}.$$

Comme A et \bar{A} forment un système complet d'évènements, d'après la formule des probabilités totales, $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B | A) + \mathbf{P}(\bar{A})\mathbf{P}(B | \bar{A}) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8} + \frac{1}{16}$ donc $\mathbf{P}(B) = \frac{7}{16}$.

$$\text{Par la formule de Bayes, } \mathbf{P}(A | B) = \frac{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B | A)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}}{\frac{7}{16}} \text{ soit } \mathbf{P}(A | B) = \frac{6}{7}.$$